

クラス 番号 名前

両面印刷。途中の計算を消さないこと。解答欄に答のみ記入されている場合は、減点する場合がある。

1. 次の微分方程式を解け。ただし、未定の定数を C_1, C_2 としてよい。

(1)
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3x = 0$$

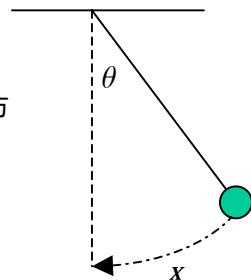
(2)
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3x = 4\sin t$$

2. 右図1のように質量 m の物体を長さ L の振り子にぶら下げて、振動させた。振り子の振れる角度を θ 、最下点から測った物体の位置までの弧の長さを x として以下の問に答えよ。ただし重力加速度を g とする。

図1

(1) 運動方程式を、 x, m, L, g などを用いて表せ。

(2) θ が微小であるとして $\sin \theta \approx \theta$ の近似式を用い、また $x = L\theta$ の関係を用いて運動方程式を解き T を求めよ。さらに、この振り子振動の周期を求めよ。

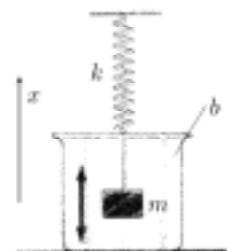


(3) 地球上で重力加速度 g を実験で正確に測定するにはどうすればよいか。簡単にかけ。

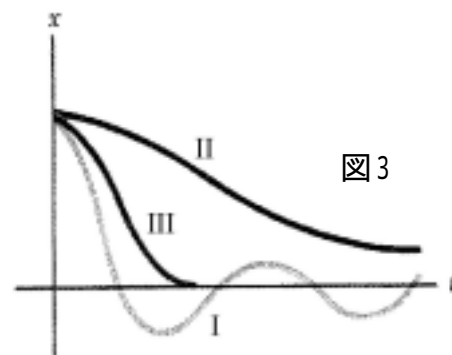
3. 質量 1 Kg の物体を粘性のある液体中にいれ、ばね定数が 4 [N/m] のばねの一端にとりつけて振動させた(図 2)。液体中で物体は、速度に比例する抵抗 $-b \frac{dx}{dt}$ を受ける。この物体を運動させたとき、物体の変移を x として、以下の問に答えよ (MKS 単位を使用)。

(1) この物体の変位に対する運動方程式を書き、 x の時間変化が図 3 の I のようになるためには、 b はどのような条件を満たさなければならないか求めよ。

図 2



(2) (1) と同じく時間変化が図 3 の I のようになっているとする。このときの振動の周期を b で表せ。



(3) この液体に別な粘性の液体を混ぜると、振動が最も早く減衰するようになった。このときできた液体の粘性抵抗係数 $b \text{ [Kg/s]}$ の値を求めよ。

(4) 抵抗が非常に大きいとき ($b \rightarrow \infty$) のとき、物体の運動はどのようなようになるか。簡単に説明せよ。

4.ばね定数 k のばねの先端に質量 m の粒子を取り付け、液体中にいれた。液体中で粒子は速度に比例する抵抗力を受ける(抵抗係数 b)。ばねの他端はモーターにつながるようにし、周期的な力 $F_0 \sin(\omega t)$ をばねに与えるようにした。以下の問に答よ。ただし、 k, m, b, F_0 は定数とする。

(1)この粒子の変位を x として、粒子に対する運動方程式をかけ。

(2)この2階線形非斉次(同次)微分方程式は、外力の部分を0とおいた斉次方程式の一般解と、非斉次方程式の特殊解の和になる。しかし、ある程度時間が経過した定常的な物理系に適用する場合は特殊解のみを考えればよい。それはなぜか簡単に説明せよ。

以下の問では簡単のため $k=1[\text{N/m}], m=1[\text{Kg}]$ とする。

(3)特殊解を計算した結果、 $x = F_0 \frac{\sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(\omega^2 - 1)^2 + \omega^2 b^2}}$ ただし $\tan \varphi = \frac{\omega b}{(\omega^2 - 1)}$ となった。

外力の振動数 ω を変化させていくと、ある ω でばねと外力が共振を起こして振幅が最大になった。そのときの ω の値(共振振動数)を求めよ。(導出する過程を記入すること。ない場合は減点する)

(4) $b=0.5$ [Kg/s] のとき、 ω を変化させて共振を起こさせると、振幅の変化は図4の実線のようになった。

ここで、粒子を入れている液体を抵抗の大きいものに変えて、

[ア] $b = 1$ [Kg/s] にしたとき

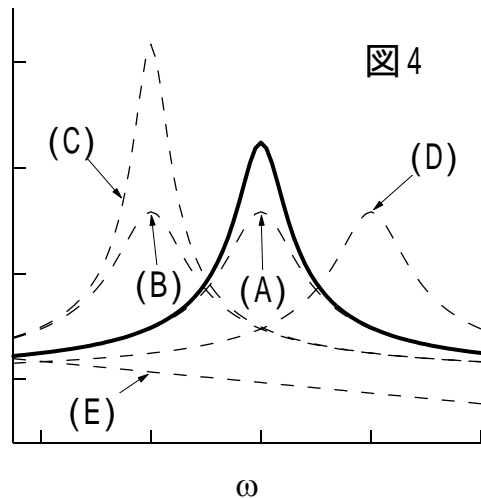
[イ] $b = \sqrt{3}$ [Kg/s] にしたとき

にそれぞれ外力を与えて運動させた。

それぞれの場合の ω と振幅の関係は図3の点線(A)~(E)のうち、どれに最も近いか。それぞれについて(A)~(E)の中から一つ選んでかけ。(答だけでよい)

[ア]:

[イ]:



5 . 1850年フランスで500人の軍隊が歩調を合わせて橋の上を行進していたところ、橋が落下し226人が亡くなるという事故が発生した。その原因を以下のような簡単な例を用いて考える。

下図のようなつり橋があり、人が歩くと重さでわずかに沈みます。その橋が沈む長さ x と、橋にかかっている重さ F の関係は、ばねと同じようにばね定数 k を用いて、 $F = -kx$ で表され、ばね定数は $k = 81 \times 10^3$ [N/m] です。

今、橋の上に体重50Kgの人が等間隔に20人並んでいます。それくらいでは橋は約10cmしか沈みませんし、まして橋が落ちるはずはありません。この20人が歩調を合わせて足踏みをします。あるテンポで足踏みすると橋は急に上下に大きく振動して、危険な状態になりました。このとき、この人たちは何秒に1回足を踏み出しているのでしょうか。計算して求めよ。ただし、橋自身の重さは無視し、簡単のため $\pi = 3$ としてよい。(途中の説明をつけることと)

