振動：練習問題解答

1．（1）

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$
$$\lambda = 2, -1$$
$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

（2）

$$\lambda^2 + 6 = 0$$
$$\lambda = \pm\sqrt{6}\, i$$
$$x = c_1 \sin\sqrt{6}t + c_2 \cos\sqrt{6}t$$

（3）

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$
$$\lambda = -2$$
$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$$

（4）

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$
$$\lambda = -1 \pm 2i$$
$$x = c_1 e^{-t}\sin 2t + c_2 e^{-t}\cos 2t$$

（5）一般解は（4）と同じである。

特殊解を $x = A\sin t + B\cos t$ とおく。代入すると

$$-A\sin t - B\cos t + 2(A\cos t - B\sin t) + 5(A\sin t + B\cos t) = \sin t$$

$$-A - 2B + 5A = 1$$
$$-B + 2A + 5B = 0$$

$$\therefore A = 1/5,\ B = -1/10$$

よって答えは

$$x = c_1 e^{-t}\sin 2t + c_2 e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin t - \frac{1}{10}\cos t$$

2．

（1）

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

（2）ｂが小さい（抵抗が小さい）ときは低減衰振動になる。

グラフは振動しながら振幅が小さくなる形（ノート参照）

$$x = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(c_1 \sin\frac{\sqrt{4km - b^2}}{2m}t + c_2 \cos\frac{\sqrt{4km - b^2}}{2m}t\right)$$

（3）（2）の答えを見ると、周期は $\frac{\sqrt{4km - b^2}}{2m}t = 2\pi$ になるときである。つまり $T = \frac{4\pi m}{\sqrt{4km - b^2}}$

（4）臨界減衰のものが最も早い。Expの関数の肩を見ると、

$$\underbrace{\frac{b}{2m}}_{\text{臨界}} > \underbrace{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}}_{\text{過減衰}}$$

となっており、臨界の方が早く減衰する。

3．臨界減衰になるには、判別式の中が０になればよい。 $b^2 - 4\cdot 5\cdot 3 = 0 \quad \therefore b = 2\sqrt{15}$

4．

（1）振り子の変位をxとすれば運動方程式は $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta$ である。

ここで $x = l\theta$ である。

また、θが微小であることから $\sin\theta \approx \theta$ と近似できる。

よって運動方程式は $ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$ である。

（2）（1）の運動方程式をばねの場合と比較するとmがlと、kがgに対応していることがわかる。

ばねと同じように周期を求めれば

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

である。lを4倍にするとTは2倍、ｍを変えても関係ない。よって答えは**2倍**。

5．（1）

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \sin\omega t$$

（2）一般解は必ずexpの関数を含んでおり時間がたつと減衰し０に近づく。そのため一般解は考えなくてよい。

（3）特殊解の分母を最大にするωを探す。微分して最大にするωを求めると（省略。ノート参照）

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$

（4）共振をおこさないためには、分母を最大にするωが存在しなければよい。つまりωが実数でなく虚数になればよい。そのためには

$$\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2} < 0$$

である。

（5）抵抗を大きくするということはbを大きくすることである。よって、（3）の答から共振振動数は小さくなるはずである。

また、共振の振幅は抵抗が大きいので小さくなる。

6．（1）運動方程式

$$0.5\frac{d^2x}{dt^2} = -x - \frac{dx}{dt}$$

この解は $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ 　$\lambda = -1 \pm i$

$$x = c_1 e^{-t}\sin t + c_2 e^{-t}\cos t$$

（2）t=0のときxに代入すると、$c_2 = 0.5$ となる。またｘを1階時間微分すると速度である。すなわち、

$$v = \frac{dx}{dt} = -c_1 e^{-t}\sin t + c_1 e^{-t}\cos t - c_2 e^{-t}\cos t - c_2 e^{-t}\sin t$$

である。t=0のときv=0であるから、$c_1 - c_2 = 0$ 　すなわち $c_1 = 0.5$

（3）運動方程式は $0.5\dfrac{d^2x}{dt^2} = -x - \dfrac{dx}{dt} + \sin\omega t$ である。

特殊解を $x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ とする。代入すると

$$-\omega^2 A\sin\omega t - \omega^2 B\cos\omega t + 2\omega(A\cos\omega t - B\sin\omega t) + 2(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = 2\sin\omega t$$

$$-\omega^2 A - 2\omega B + 2A = 2$$
$$-\omega^2 B + 2\omega A + 2B = 0$$

これを計算すると、

$$A = 2\frac{(2-\omega^2)}{(2-\omega^2)^2 + 4\omega^2} \qquad B = 2\frac{-2\omega}{(2-\omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

となる。

7．省略。各自調べてみよ。教科書など参考。

※グラフの形がどうなるかを理解しておくこと。また、余裕があれば授業時のプリント・教科書なども復習すること。